

Mécanique classique | Chapitre 6 | Correction TD (M6)

Exercice n°1 • Moment cinétique de l'électron



Par définition :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = R \vec{u}_r \wedge m R \omega \vec{u}_\theta = m R^2 \omega \vec{u}_z$$

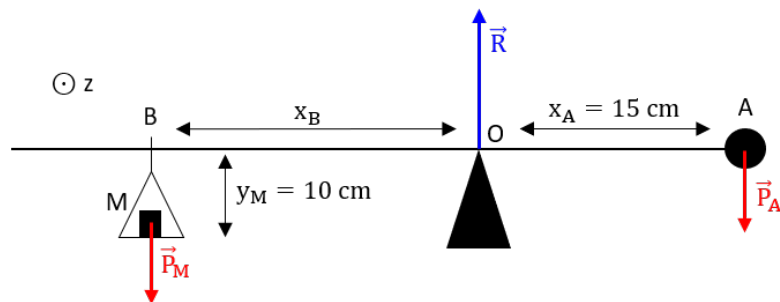
On en déduit :

$$\|\vec{L}_0\| = m R^2 \cdot 2\pi f \vec{u}_z = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Exercice n°2 • Balancelle



1) La tige et la nacelle n'ayant pas de masse, les trois forces sont le poids de chaque masse et la réaction du support au niveau du point de contact.



2) La balance est équilibrée lorsque la somme des moments des forces est nulle.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O(\vec{p}_M) + \vec{M}_O(\vec{p}_A) + \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_M + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}_A + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{OB} \wedge \vec{p}_M + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}_A + \vec{0} \\ &= (x_B m g - x_A m_A g) \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$m = m_A \frac{x_A}{x_B}$$

3) On écarte la balance d'un angle α . Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{p}_M) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_M = x_B m g \cos(\alpha) \vec{e}_z \\ \vec{M}_O(\vec{p}_A) &= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}_A = -x_A m_A g \cos(\alpha) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le TMC donne :

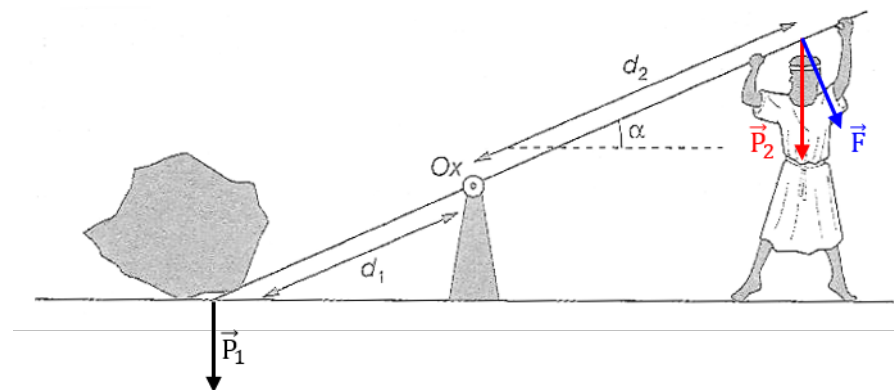
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

Donc la balance conserve son moment cinétique, donc sa vitesse angulaire (initialement nulle) reste constante. La balance reste ainsi équilibrée (et heureusement, sinon cela ne serait pas très pratique pour une balance).

Exercice n°3 • Effet de levier



1) Si Archimède se suspend au levier (cas rouge avec le poids $\vec{p}_2$) :



Les moments des deux poids valent :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{p}_1) &= \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{p}_1 = d_1 m g \cos(\alpha) \vec{u}_x \\ \vec{M}_O(\vec{p}_2) &= \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{p}_2 = -d_2 m_{Arch} g \cos(\alpha) \vec{u}_x \end{aligned}$$

Pour soulever le rocher, il faut que (signe donné par la règle de la main droite) :

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = d_1 m g \cos(\alpha) - d_2 m_{Arch} g \cos(\alpha) < 0 \Rightarrow m_{Arch} > \frac{d_1}{d_2} M = 67 \text{ kg}$$

2) Pour maximiser le moment, il faut maximiser le bras de levier et donc appliquer une force perpendiculaire au levier (cas bleu avec la force $\vec{F}$). Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_1) &= \vec{OM}_1 \wedge \vec{P}_1 = D_1 mg \cos(\alpha) \vec{u}_x \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{OM}_2 \wedge \vec{F} = -d_2 F \vec{u}_x\end{aligned}$$

Pour soulever le rocher, il faut donc que :

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = D_1 mg \cos(\alpha) - d_2 F < 0 \Rightarrow m = \frac{F}{g} > \frac{d_1}{d_2} M \cos(\alpha) = 33 \text{ kg}$$

En ajustant correctement l'angle, on peut ainsi diviser de moitié la force nécessaire.

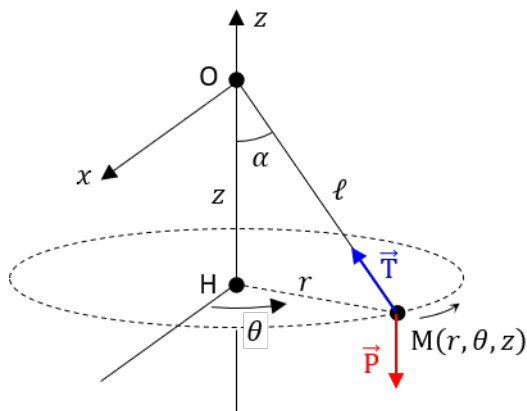
Exercice n°4 • Pendule conique



1) Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= (\vec{OH} + \vec{HM}) \wedge m \vec{v} \\ &= (-\ell \cos(\alpha) \vec{u}_z + \ell \sin(\alpha) \vec{u}_r) \wedge m (\ell \omega \sin(\alpha) \vec{u}_\theta) \\ &= m \ell^2 \omega \sin(\alpha) (\cos(\alpha) \vec{u}_r + \sin(\alpha) \vec{u}_z)\end{aligned}$$

2) Le point M est soumis à son poids et à la tension du câble.



$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \vec{OM} \wedge \vec{P} = \left(\underbrace{\vec{OH}}_{\propto \vec{u}_z} + \vec{HM} \right) \wedge (-mg \vec{u}_z) = \ell mg \sin(\alpha) \vec{u}_\theta \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}\end{aligned}$$

Le TMC donne donc :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m \ell^2 \omega^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \vec{u}_\theta = \ell mg \sin(\alpha) \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{\ell \omega^2}}$$

Cet angle existe si et seulement si $g < \ell \omega^2$, c'est-à-dire si le pendule tourne suffisamment vite.

Conclusion : $\alpha = 0$ si $g > \ell \omega^2$ et $\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\ell \omega^2}\right)$ sinon.

Exercice n°5 • Guide circulaire



1) On a :

$$\begin{aligned}L_z &= (R \vec{u}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z = m R^2 \dot{\theta} \\ \mathcal{M}_z(\vec{P}) &= (R \vec{u}_r \wedge mg \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_z = m R g \cos(\theta) \\ \mathcal{M}_z(\vec{N}) &= 0\end{aligned}$$

Le TMC donne donc :

$$\frac{dL_z}{dt} = m R^2 \ddot{\theta} = m R g \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos(\theta)}$$

2) À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$, donc $\theta_{eq} = \pm \pi/2$. On pose : $\theta = \pm \pi/2 + \varepsilon$ avec ε un infiniment petit d'ordre 1. L'ED devient alors :

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{g}{R} \cos(\varepsilon \pm \pi/2) = \mp \frac{g}{R} \sin(\varepsilon) \simeq \mp \frac{g}{R} \varepsilon \Rightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} \pm \frac{g}{R} \varepsilon = 0}$$

Seule l'équation avec un + correspond à un oscillateur (logique, la masse se trouve en bas du cercle). La pulsation des oscillation vaut : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/R}}$.

3) on doit ajouter le moment de la force de rappel du ressort dans le TMC.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_z(\vec{F}_{el}) &= (R\vec{u}_r \wedge -k\overrightarrow{AM}) \cdot \vec{u}_z \\
 &= (R\vec{u}_r \wedge -k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})) \cdot \vec{u}_z \\
 &= (R\vec{u}_r \wedge -k(-R\vec{u}_x + R\vec{u}_r)) \cdot \vec{u}_z \\
 &= kR^2(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_z \\
 &= -kR^2 \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Le TMC donne donc :

$$\frac{dL_z}{dt} = mR^2\ddot{\theta} = mRg \cos(\theta) - kR^2 \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos(\theta) - \frac{k}{m} \sin(\theta)$$

Les positions d'équilibre sont données par :

$$\tan(\theta_{eq}) = \frac{mg}{kg}$$

Exercice n°6 • Expérience de Cavendish (1798)



1) Le système $\mathcal{S}$ est constitué de deux points matériels. Ainsi :

$$L_z(\mathcal{S}) = L_z(m \text{ n°1}) + L_z(m \text{ n°2}) = m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \dot{\alpha} + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \dot{\alpha} = \boxed{\frac{md^2}{2} \dot{\alpha}}$$

2) Le moment de chaque poids est nul car $\vec{P}$ est colinéaire à (Oz) . Le seul moment non nul est donc celui du fil de torsion. On applique le TMC au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\frac{dL_z}{dt} = -C\alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} = \omega_0^2 \alpha(t) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{md^2}}$$

3) On en déduit la période des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{md^2}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}}$$

4) Déterminons les moments des forces gravitationnelles entre les masses M et m . On constate (par symétrie + règle de la main droite) que les moments des deux masses M avec la masse m qui se trouve à l'opposé du dispositif (pas la masse m voisine) se compensent parfaitement. Il suffit donc de considérer les moments des deux masses M avec leur masse m voisine (ces deux moments sont égaux).

Pour les deux masses M et m de droite, il vient :

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{grav\ M \rightarrow m}}) = \left(\frac{d}{2}\vec{u}_x \wedge \frac{GmM}{r^2}\vec{u}_y\right) \cdot \vec{u}_z = \frac{GmMd}{2r^2}$$

Il en va de même pour les masses de gauche. Ainsi, le TMC à l'équilibre donne :

$$0 = -C\alpha_1 + \frac{GmMd}{2r^2} + \frac{GmMd}{2r^2} \Rightarrow \boxed{G = \frac{Cr^2\alpha_1}{dmM}}$$

5) Après réflexion sur le miroir, le rayon est dévié d'un angle $2\alpha_1$. Ainsi :

$$\tan(2\alpha_1) \simeq 2\alpha_1 = \frac{\Delta y}{2L} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{\Delta y}{2L} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}}$$

6) On en déduit finalement G :

$$\boxed{G = \frac{md^2}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^2}{dmM} \cdot \frac{\Delta y}{2L} = 6,60 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}}$$

C'est une excellente valeur pour les moyens de l'époque : 1 % d'erreur environ !